Homer^3

ovvero:

ciò che accadde a Homer Simpson

quando riuscì ad attraversare il muro

del salotto di casa sua

Alessio Gambetta

“Al suo livello più profondo, la realtà è la matematica nella natura”
Pitagora

Introduzione: la matematica nei Simpson

I *Simpson* esordirono sul piccolo schermo nel 1989 e subito riscossero un grandissimo successo destinato, negli anni, solo ad aumentare. Tante sono le citazioni ed i rimandi nella serie ai moltissimi campi della conoscenza umana, ma più di tutte appare evidente la grande passione che gli autori riserbano per la matematica nei suoi molteplici aspetti: dalle basi scolastiche fino alle più complesse branche di questa scienza, essa viene da ormai quasi trent’anni “somministrata” agli spettatori per mezzo di perlopiù brevi sequenze di fotogrammi. Gli sceneggiatori possono esibire infatti con fierezza diplomi di laurea in matematica, fisica e/o informatica conseguiti in alcune delle più prestigiose università americane. L’intento di questo elaborato è quello di analizzare gli spunti matematici fornitici in un particolare cortometraggio della serie animata, nel quale si spazia dall’identità di Eulero e dall’ultimo teorema di Fermat fino al modo in cui si possono concepire le dimensioni superiori.

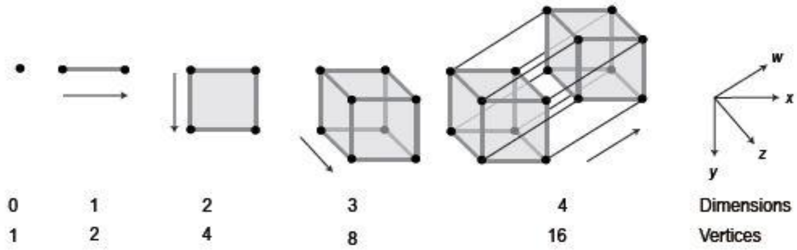
Homer^3

Il primo degli episodi per la ricorrenza di Halloween (“Treehouse of Horror”) andò in onda con la seconda stagione dei *Simpson*. Da allora divenne una ricorrenza annuale, in cui tre cortometraggi vanno a rompere i normali schemi della vita a Springfield in favore dell’horror o della fantascienza. “Homer^3” è l’ultimo segmento dell’episodio “La paura fa novanta VI” (1995), ed è da molti considerato come la più elegante e profonda integrazione tra i *Simpson* e la matematica. Tutto comincia in modo molto semplice: Homer, ansioso di evitare le cognate giunte in casa sua a sorpresa, riesce a trovare un discreto nascondiglio dietro la libreria. Libreria che, però, cela una sorta di misterioso portale per un altro universo. Sentendo le voci delle cognate, Homer, disperato, si tuffa temerariamente verso l’ignoto.

The Twilight Zone: immaginare una dimensione superiore

Poco prima di attraversare il muro del salotto di casa sua, osservando il curioso fenomeno, Homer commenta: “Strano. Assomiglia a qualcosa di quel programma del crepuscolo su quella zona.”. La frase è un esplicito riferimento alla famosa serie televisiva degli anni sessanta *The Twilight Zone*. In un episodio del 1962 intitolato “La bambina perduta”, i genitori della piccola Tina cadono in preda alla disperazione quando, entrando nella sua cameretta, trovano che è scomparsa, ma ne possono ancora sentire la voce riecheggiare tra i muri. Il soccorso giunge presto dall'amico di famiglia Bill, un fisico teorico, che, identificati i confini di un "portale" sul muro della cameretta, dichiara che Tina è finita nella quarta dimensione. Similmente accade nell'universo simpsoniano.

Anche se Homer passa da due a tre dimensioni e non da tre a quattro, gli eventi sono gli stessi e l'eccentrico e geniale scienziato John I.Q. Frink Junior è l'unico in grado di darne una spiegazione. Dopo aver tracciato un profilo sul muro per delineare il portale, afferma: "Be', sarebbe ovvio anche per l'individuo più scriteriato, laureato e con specializzazione in topologia iperbolica, che Homer Simpson è piombato… nella terza dimensione!". Nessuno dei personaggi arriva a comprendere appieno il significato di "terza dimensione", poiché tutti vivono, di fatto, nella seconda. Anche se, a pensarci bene, i *Simpson* trascorrono la loro vita in un universo un po' più complicato di quello bidimensionale: basta osservare i loro movimenti. Assumiamo comunque, per gustarci appieno la storia, che il loro universo abbia effettivamente due sole dimensioni. Frink spiega ai presenti con un metodo molto intuitivo il rapporto tra il loro universo e quello in cui è finito il nostro eroe, metodo che noi possiamo riutilizzare senza problemi per illustrare i rapporti che intercorrono tra tutte le dimensioni.



Partiamo dal punto: esso è adimensionale, non ha lunghezza, né larghezza, né profondità. È solo un concetto astratto che indica una data posizione in un sistema. Se ora trasliamo questo punto lungo una qualsiasi direzione otterremo una linea (1^a dimensione). Continuiamo con questo sistema: otterremo, traslando la linea parallelamente a sé stessa di tanto quanto la sua lunghezza, un quadrato (2^a dimensione). Ora, traslando lungo un nuovo asse questo quadrato arriveremo ad un cubo (3^a dimensione). Una cosa che ci tornerà utile tra poco, inoltre, può essere considerare la 3^a dimensione come ciò lungo cui possiamo piegare la 2^a. Per esempio: un *flatlander* (essere bidimensionale) che dovesse andare da un punto A ad un punto B su di un foglio, invece di percorrere una linea retta potrebbe, per fare prima, piegare il foglio lungo la 3^a dimensione, avvicinando notevolmente A e B fino a farli coincidere e giungendo molto più velocemente a destinazione! Comunque, eccoci arrivati al mondo in cui viviamo: uno spazio euclideo a tre dimensioni tra loro intercambiabili.

Questo nostro procedimento logico ci porterebbe adesso a traslare il cubo lungo un ipotetico asse nella quarta dimensione. Da questo momento ci dovremo limitare (anche perché non possiamo fare altrimenti) ad "immaginare" le dimensioni superiori e, purtroppo, a non comprenderle del tutto. Non si spaventi quindi il lettore se ciò che segue suonerà un poco astruso. Che nome possiamo assegnare alla 4ª dimensione? Una risposta potrebbe essere: il "tempo". Se pensiamo alle cose passate e a quelle future, una linea che le collega sarà una linea nella 4ª dimensione. Inoltre, come per un *flatlander* lo spazio a due dimensioni intorno a lui si può curvare nella 3ª dimensione, così il nostro spazio tridimensionale si può piegare nella 4ª. E, conseguentemente, una linea dritta del tempo nella 4ª dimensione si curverà nella 5ª! Questo darà vita, nella 5ª dimensione, ad una infinita moltitudine di futuri possibili influenzati dalle nostre libere scelte e dal caso. Teniamo conto adesso che il nostro passato risulta già scritto: le cose sono avvenute in un certo modo e siamo certi di come queste siano avvenute. Per raggiungere un altro degli universi possibili, però, come possiamo fare? Mi spiego: un universo alternativo in cui noi, ad esempio, siamo ricchi di famiglia sin dalla nascita, come lo raggiungiamo? La strada lunga sarebbe tornare indietro nel tempo, cambiare gli eventi passati e viaggiare poi in avanti nel tempo per vedere il futuro da ciò scaturito. Oppure (e questa sarebbe la via più breve) potremmo piegare la 5ª dimensione lungo la 6ª! Ciò ci permetterebbe di saltare istantaneamente dalla nostra linea di possibilità pentadimensionale ad un'altra caratterizzata da un passato diverso dal nostro. In sostanza: la 5ª dimensione riguarda tutti i nostri possibili futuri presupponendo un passato già conosciuto, mentre la 6ª dimensione tutti i salti che possiamo fare verso universi con passati alternativi! Se pensiamo ora che una linea che parte dal Big Bang e porta ad una possibile fine del nostro universo è una linea nella 4ª dimensione, nella 6ª potremmo osservare il Big Bang collegato a tutte le infinite possibili linee temporali che portano a tutte le possibili infinite fini dell'universo insieme a tutti i possibili salti che tra esse possiamo compiere. Trattando ora questo insieme esadimensionale come se fosse un punto, una linea che collega questo punto ad un altro (indicante un universo con condizioni iniziali diverse dal Big Bang) sarà una linea nella 7ª dimensione. Poter invece, muovendosi lungo questa linea, deviare il nostro cammino verso un altro insieme di possibilità, significherebbe entrare nell'8ª dimensione! E se da un qualsiasi punto d'arrivo nell'8ª dimensione volessimo saltare istantaneamente ad un altro possibile punto d'arrivo dovremmo piegare l'8ª dimensione lungo la 9ª! Ricapitolando: nella 7ª dimensione abbiamo trattato tutte le possibili linee temporali generatesi dal Big Bang come un singolo punto, ed abbiamo immaginato di disegnare una linea verso un punto che rappresenti tutte le possibili linee temporali di un altro universo con condizioni iniziali completamente differenti. Ora, entrando nella 10ª dimensione, dobbiamo tener conto di tutti i possibili salti per tutte le possibili linee temporali di tutti gli universi possibili e considerarli come un singolo punto decadimensionale. Eccoci arrivati alla fine. Se volessimo continuare il ciclo, dovremmo trovare un altro punto decadimensionale da collegare al primo per entrare nell'11ª dimensione. Ma ciò non è possibile! Non abbiamo altri posti dove andare, avendo considerato tutte le linee temporali possibili ed immaginabili. Secondo i fisici sostenitori della Teoria delle Stringhe, le superstringhe che vibrano nella 10ª dimensione danno vita a tutte le particelle che compongono il nostro universo, nonché quelli alternativi. Quindi tutte le possibilità sono contenute nella 10ª dimensione! Confusi? È normale. Pensare che non è nemmeno l'unica delle teorie attualmente in considerazione! Adesso però ci conviene tornare coi piedi per terra: parlavamo dei *Simpson*. Ecco… Malgrado tutto ciò che abbiamo detto, Frink non può in alcun modo aiutare Homer.

xyz, PDI e una teiera

Appena oltrepassato il portale, tre cartelli contrassegnati coi nomi "x", "y" e "z" stanno ad indicare l'arrivo di Homer nella 3ª dimensione. Guardandosi intorno, egli esordisce con una frase che allude al fatto di trovarsi nella più sofisticata scena di animazione mai apparsa alla Tv: "Mitico! Questo posto sembra costoso… sento che sto dilapidando una fortuna solo restandomene impalato qui. Meglio che ne ricavi il massimo.". In effetti, il cortometraggio fu prodotto con le più avanzate tecniche di animazione al computer dell'epoca e fu finanziato da una società sicura del successo che l'effetto 3D avrebbe avuto sull'onda della fama dei *Simpson* (questa società era la Pacific Data Images). Non a caso, lo stesso anno, uscì nei cinema *Toy Story*, primo lungometraggio interamente in grafica computerizzata. Nel frattempo, una teiera in lontananza ci dimostra le potenzialità dei software d'animazione 3D: le diverse curvature della superficie non erano infatti di facile resa.

ASCII

Possiamo veder fluttuare vicino al nostro uomo un primo spunto matematico: 46 72 69 6E 6B 20 72 75 6C 65 73 21. Questa serie apparentemente casuale di numeri e lettere è interamente formata da cifre esadecimali (numerazione in base 16) dove oltre alle nostre solite dieci cifre (da 0 a 9) ne vengono utilizzate altre sei: A, B, C, D, E ed F (i numeri da 10 a 15). Ciascuna coppia di cifre che possiamo vedere rappresenta un carattere in ASCII (American Standard Code for Information Interchange), un protocollo per convertire lettere e segni di punteggiatura in numeri di diverse notazioni, soprattutto ad uso dei computer. Nel nostro caso, convertendo ogni coppia in lettera, otteniamo: "Frink Rules!", ovvero, "Frink detta le regole!".

$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$

L'uguaglianza sovrastante altro non è se non una falsa soluzione all'ultimo teorema di Fermat! Pierre de Fermat (1601-1665), uno dei più grandi matematici della storia, fu il primo a proporlo: studiando su di un testo di aritmetica del III secolo a.C., e cercando (senza trovarle) le possibili soluzioni all'equazione: $x^n + y^n = z^n$ *per* $n>2$, annotò a margine una frase secondo la quale queste non esistevano. Il teorema o, meglio, la congettura (affermazione basata sull'intuito e non dimostrata), rimase a lungo non verificata, e la sua fama, nel corso dei secoli, non fece che crescere: suscitò interesse fino a spingere, nel 1908, un industriale tedesco a lasciare in eredità 100000 marchi a colui che sarebbe riuscito a risolvere questo "ultimo teorema". Venne finalmente verificato nel 1995 da Andrew Wiles della Princeton University. La cosa interessante dell'uguaglianza che compare nell'episodio è che appare vera se cerchiamo di accertarla con una qualsiasi calcolatrice scientifica, ma se potessimo andare a vedere le vere soluzioni delle potenze, noteremmo che c'è una discrepanza tra i due termini di appena lo 0,00000003%. Discrepanza che basta però a rendere falsa l'uguaglianza. Le quasi-soluzioni, in matematica, non esistono.

La disequazione: $\rho_{m0} > 3H_0^2 / 8\pi G$

La precedente è un'interessante forma di matematica applicata che ci è dato modo di intravedere: un'equazione cosmologica, o, meglio, una disequazione. Essa descrive la densità dell'universo in cui Homer è finito e ne produce un valore elevato, il che lo porterà necessariamente a crollare su sé stesso. Per comprenderla concettualmente, dobbiamo considerare la così detta "densità critica" (il membro di destra della disequazione), parametro secondo il quale è possibile descrivere il destino ultimo di un universo. Se la densità media effettiva dell'universo è minore di questo valore, esso si espanderà per sempre (universo aperto); se è uguale, invece, aumenterà sempre di volume, ma in modo decrescente, tendendo quindi, a lungo termine, a fermarsi (universo critico); infine, se è maggiore, crescerà fino ad una grandezza massima per poi collassare in una singolarità in un processo generalmente chiamato "Big Crunch" (universo chiuso).

L'identità: $e^{i\pi} + 1 = 0$

"[…] non possiamo capirla, e non sappiamo che cosa significhi; ma l'abbiamo dimostrata, e quindi sappiamo che deve essere vera."

Benjamin Peirce (1809-1880)

L'identità di Eulero possiede l'interessante capacità di suscitare sempre sorpresa quando la si osserva: cinque semplici simboli matematici riuniti in una sola uguaglianza. L'1 e lo 0, rispettivamente gli elementi neutri del prodotto e della somma, il numero di Nepero e (2,71828…), base dei logaritmi naturali, il numero irrazionale π (3,1415…), rapporto fra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro, e i, l'unità immaginaria dei numeri complessi ($i = \sqrt{-1}$). Cerchiamo ora di dare una semplice dimostrazione dell'identità. Cominciamo col considerare le così dette "serie di Taylor". In generale, una serie numerica è la somma degli elementi di una successione (e la successione è, grossolanamente, un elenco ordinato costituito da una infinità di numeri reali detti "termini"). Una serie di Taylor è, in particolare, una rappresentazione di una funzione come serie di termini calcolati a partire dalle derivate di un punto qualsiasi della funzione. Ora vediamo le serie di Taylor rispettivamente per la funzione esponenziale (una funzione data da una potenza con base fissa, in questo caso e, ed esponente variabile), per quella del coseno e per quella del seno. Le si presenta qui sia in forma estesa sia in forma contratta:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \dots \ \forall x \ \in \ \mathbb{R} \qquad\qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \ \in \ \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \dots \ \forall x \ \in \ \mathbb{R} \qquad\qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \ \in \ \mathbb{R}$$

Sostituiamo ora, nella funzione esponenziale, x con $i\alpha$ (dove $i = \sqrt{-1}$ è, come detto sopra, l'unità immaginaria che ci permette di estendere il campo dei numeri reali al campo di quelli complessi e α è un angolo qualsiasi). Tenendo conto che $i^2 = -1$, potremo raggruppare la forma risultante in:

$$e^{i\alpha} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ \dots\right) + \ i\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ \dots\right)$$

riconoscendovi sia la serie di Taylor per il coseno sia quella per il seno. Possiamo quindi scrivere: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ e, ponendo $\alpha = \pi$, otterremo: $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$,dove $\pi \approx 3{,}14$ rad (π equivale a circa 3,14 radianti), ovvero (tenendo conto della proporzione $180° : \pi = \alpha° : \alpha_{rad}$) π rad = 180°. Con π equivalente a 180°, ed essendo $\cos\pi = \cos 180° = -1$ e $\sin\pi = \sin 180° = 0$, si può riscrivere: $e^{i\pi} = -1 + i0$ e quindi: $e^{i\pi} = -1$, che è infatti l'equazione che vediamo volteggiare alle spalle di Homer (posta in genere nella forma $e^{i\pi} + 1 = 0$). Questa è l'identità di Eulero. Quella che un tredicenne Richard Feynman definì, a buon motivo, la "formula più bella di tutti i tempi".

P = NP

La questione delle classi di problemi P ed NP è uno dei così detti "problemi del millennio", per la cui risoluzione è stata offerta una ricompensa di un milione di dollari. È un argomento riguardante la teoria della complessità computazionale (branca matematica che studia le risorse minime necessarie, quali il tempo di calcolo e la memoria, per la risoluzione di un problema). P sta per *tempo polinomiale,* mentre NP per *tempo polinomiale non deterministico*. In breve, sotto P sono radunati tutti i problemi di facile e veloce risoluzione tramite l'utilizzo di un determinato algoritmo;

sotto NP, invece, tutti quelli di difficile e lunga risoluzione per i quali non si dispone di un algoritmo pratico e definito. Oppure potrebbe anche essere che gli NP non siano così difficili come sembrano. Potrebbe darsi che ancora non abbiamo trovato adatti algoritmi volti alla loro risoluzione. P = NP, scrivono gli sceneggiatori nel cortometraggio. Questa è la loro opinione.

Conclusione

Eccoci arrivati alla fine. Homer, ormai intrappolato nel suo nuovo universo tridimensionale, viene colpito al fondoschiena da un piccolo cono vagante. Irato, lo scaglia via. Questo si conficca nel "terreno" e curva lo spazio talmente tanto da dare vita ad un buco nero! Presto l'universo del nostro eroe converge verso la singolarità: Bart, il primogenito di Homer, si tuffa oltre il portale per soccorrere il padre e, non potendo far nulla, gli consiglia imprudentemente di saltare oltre il buco nero. Homer, altrettanto imprudentemente, prende la rincorsa e… ci finisce dentro! Fortuna per lui che il buco nero si rivela essere un varco attraverso universi paralleli: mentre Bart viene riportato indietro e racconta ciò che ha visto, Homer si ritrova… be'… questo lo scoprirà chi, ormai incuriosito dall'episodio, lo andrà a vedere!