Gioella Lorenzon

ARITMETICA EQUATORIALE
Costruire la struttura ($\mathbb{R}$, $\oplus$, $\odot$)

Abstract. *Lo scopo di questo articolo è studiare una struttura algebrica costruita con operazioni non usuali cercando di individuare analogie e differenze con le strutture algebriche costruite con gli insiemi numerici e le operazioni standard.*

Introduzione

Definiamo due nuove operazioni: $a \oplus b = min\{a; b\}$ che chiamiamo addizione equatoriale e $a \otimes b = a + b$ detta moltiplicazione equatoriale. [1] Quali sono le proprietà di questa nuova addizione e moltiplicazione? Possiamo definire la sottrazione e la divisione?

L'obiettivo principale è quello di definire una nuova struttura, formata dall'insieme numerico $\mathbb{R}$ e dalle nuove operazioni, l'addizione equatoriale e la moltiplicazione equatoriale.

Ci chiediamo innanzitutto se nella costruzione di una struttura sia possibile considerare un insieme numerico già definito a priori – nel nostro caso l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali – oppure se tale insieme debba essere definito attraverso le operazioni della struttura stessa. Cioè: "nascono" prima gli insiemi o le operazioni? Osserviamo che la struttura standard ($\mathbb{R}$, +, $\cdot$) è costruita a partire dalla definizione assiomatica di ($\mathbb{N}$, +, $\cdot$) e viene poi ampliata a ($\mathbb{Z}$, +, $\cdot$), ($\mathbb{Q}$, +, $\cdot$) e poi a ($\mathbb{R}$, +, $\cdot$) in modo da rendere interne all'insieme numerico le varie operazioni definite. Procediamo quindi in maniera analoga nella definizione della struttura equatoriale ($\mathbb{R}$, $\oplus$, $\odot$).

Costruire la struttura ($\mathbb{N}$, $\oplus$, $\odot$)

Introduciamo l'insieme $\mathbb{N}$ attraverso gli assiomi di Peano:

Definizione 1 *Assiomi di Peano:*

i) *L'insieme $\mathbb{N}$ contiene lo zero: $0 \in \mathbb{N}$*

ii) *L'insieme $\mathbb{N}$ contiene il successore di ogni suo elemento $s(n)$: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow s(n) \in \mathbb{N}$*

   dove il successore $s(n)$ è definito da:

   a) $\nexists n \in \mathbb{N} \mid s(n)=0$
   b) $s(n)=s(m) \Rightarrow n=m$

iii) *Tra tutti gli insiemi X che godono delle proprietà i) e ii) $\mathbb{N}$ è il più piccolo:*

   se X è un insieme tale che

   - $0 \in X$
   - $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$

   allora $\mathbb{N} \subseteq X$.

E' dimostrabile che tutti gli insiemi che rispettano gli assiomi di Peano sono tra loro isomorfi.

Ordinamento. L'insieme $\mathbb{N}$ è dotato di un buon ordinamento $\leq$ tale per cui $n \leq s(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Si tratta di un ordinamento totale; ciò significa che i suoi elementi sono legati fra di loro da una relazione riflessiva ($m \leq m$), antisimmetrica ($m \leq n$ e $n \leq m$ se e solo se $m = n$), transitiva (se $m \leq n$ e $n \leq k$ allora $m \leq k$) e totale (dati n, $m \in \mathbb{N}$ allora $n \leq m \vee n > m$, cioè due numeri naturali sono sempre confrontabili).

Definizione 2 *Enunciati questi postulati, definiamo innanzitutto l'addizione (+), la moltiplicazione ($\cdot$) e la potenza ($\wedge$) dell'aritmetica standard:*

$$+ \ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \cdot \ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad {}^\wedge \ : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + s(n) = s(m+n) \end{cases} \qquad \begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot s(n) = m + (m \cdot n) \end{cases} \qquad \begin{cases} m^{\wedge 0} = 1 \\ m^{\wedge s(n)} = m \cdot (m^{\wedge n}) \end{cases}$$

Definizione 3 *Introduciamo ora le due operazioni principali della geometria equatoriale, l'addizione equatoriale che coincide con il minimo ($\oplus$) e la moltiplicazione equatoriale che coincide con la somma standard ($\odot$):*

[1] La scelta del termine *equatoriale* deriva dalla somiglianza di questa struttura, che è definita con le operazioni di minimo e di addizione, con quella della geometria tropicale, basata sul massimo e l'addizione.

$$\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \odot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$m \oplus n = \begin{cases} m \Longleftrightarrow m \leqslant n \\ n \Longleftrightarrow m > n \end{cases} \qquad \begin{cases} m \odot 0 = m \\ m \odot s(n) = s(m \odot n) \end{cases}$$

Cerchiamo quali sono le proprietà di cui godono le operazioni di addizione equatoriale e moltiplicazione equatoriale nell'insieme $\mathbb{N}$, facendo riferimento alle proprietà delle operazioni standard.

Teorema 0.1 *L'addizione equatoriale e la moltiplicazione equatoriale godono della proprietà commutativa.*
Per l'addizione equatoriale, dati a e b tali che $a, b \in \mathbb{N}$ e $a \leq b$ (senza perdita di generalità):

$$a \oplus b = b \oplus a = a$$

Per la moltiplicazione equatoriale, analogamente all'addizione standard, dati $a \in \mathbb{N}$ e $b \in N$:

$$a \odot b = b \odot a$$

Teorema 0.2 *L'addizione e la moltiplicazione equatoriale godono della proprietà associativa.*
Per l'addizione equatoriale, dati a, b e c tali che $a, b, c \in \mathbb{N}$ e $a \leq b \leq c$ (senza perdita di generalità):

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b = a \qquad = \qquad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus c = a$$

Per la moltiplicazione equatoriale, analogamente all'addizione standard, dati $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$:

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$$

Teorema 0.3 *L'addizione equatoriale e la moltiplicazione equatoriale godono della proprietà dissociativa.*
Per l'addizione equatoriale, dati a, b, c e d tali che $a, b, c \in \mathbb{N}$ e $a \leq b \leq c$ (senza perdita di generalità):

$$a \oplus b = a \oplus (b \oplus c) = a$$

Per la moltiplicazione equatoriale, dati $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$ tali che $d = b \odot c$:

$$a \odot d = a \odot (b \odot c)$$

Teorema 0.4 *Nella struttura ($\mathbb{N}$, $\oplus$, $\odot$) la moltiplicazione equatoriale $\odot$ è distributiva rispetto all'addizione equatoriale $\oplus$, infatti, considerando tre numeri a, b, $c \in \mathbb{N}$ tali che $a \leqslant b \leqslant c$ (senza perdita di generalità):*

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \\ a \odot b &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad \textit{con} \quad a \odot b \leqslant a \odot c \quad \textit{perché} \quad b \leqslant c \\ a \odot b &= a \odot b \end{aligned}$$

È vero anche che

$$(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$$

per la proprietà commutativa della moltiplicazione equatoriale.

Teorema 0.5 *Per l'addizione equatoriale non esiste in $\mathbb{N}$ l'elemento neutro*[2] *perché non esiste un numero che sia maggiore di tutti gli elementi dell'insieme.*

Teorema 0.6 *Per la moltiplicazione equatoriale esiste l'elemento neutro 0, tale per cui $a \odot 0 = a$, come per l'addizione standard.*

Teorema 0.7 *Per l'addizione equatoriale l'elemento simmetrico*[3] *non esiste.*

Nella struttura ($\mathbb{N}$, $\oplus$) non è definito l'elemento neutro e e osserviamo che, anche estendendo l'insieme $\mathbb{N}$ introducendo l'elemento neutro rispetto all'addizione equatoriale (potrebbe essere $+\infty$), non è comunque possibile da esso ricavare l'elemento simmetrico di un numero a causa della perdita di informazione nell'operare con il minimo. Cercare l'elemento simmetrico di $n \in \mathbb{N}$, significa trovare un numero $m \in \mathbb{N}$ tale che $min\{n, m\} = +\infty$ e tale numero non esiste perché $min\{n, m\} = +\infty$ se e solo se $n = m = +\infty$.

Ciò significa che **è impossibile definire l'operazione di sottrazione equatoriale, cioè l'operazione inversa dell'addizione equatoriale, dunque è impossibile estendere la struttura ($\mathbb{N}$, $\oplus$) a una struttura ($\mathbb{Z}$, $\oplus$) in analogia con l'estensione da ($\mathbb{N}$, +) a ($\mathbb{Z}$, +).**

[2] Un'operazione commutativa $*$ possiede l'elemento neutro e in un insieme S se e solo se $x * e = x$ per qualsiasi $x \in S$

[3] Gli elementi di un insieme S in cui è definita l'operazione commutativa $*$ possiedono l'elemento simmetrico se e solo se per ogni elemento $x \in S$ esiste un numero x' tale che $x * x' = x' * x = e$.

Teorema 0.8 *Non esiste in $\mathbb{N}$ l'elemento simmetrico rispetto alla moltiplicazione equatoriale, cioè l'elemento per cui $a \odot b = e = 0$, come per l'addizione standard.*

Occorrerà, per definire l'elemento simmetrico rispetto alla moltiplicazione equatoriale, introdurre l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$.

Costruire la struttura ($\mathbb{Z}$, $\oplus$, $\odot$)

Partendo dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, si può definire l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$ come l'insieme delle coppie di numeri naturali $[(n, m)]$ tali che

$$(n, m) \equiv (n', m') \Longleftrightarrow n + m' = n' + m.$$

Ordinamento. Anche $\mathbb{Z}$ è, come $\mathbb{N}$, un insieme totalmente ordinato. Si ha:

$$[(n, m)] \leq [(n', m')] \qquad \text{se in } \mathbb{N} \quad n + m' \leq n' + m$$

Operazioni. Possiamo estendere in $\mathbb{Z}$ le operazioni precedentemente definite in $\mathbb{N}$: il minimo, la somma, la moltiplicazione e la potenza.

Facciamo presente che, dopo aver definito le operazioni $+$, $\cdot$, $\wedge$ per $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, queste si possono prima estendere per $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ e poi per $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (così come successivamente si potranno estendere per $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ e poi per $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$). Decidiamo di omettere questi passaggi intermedi.

- Addizione equatoriale:

$$\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : [(n, m)] \oplus [(n', m')] = \begin{cases} [(n, m)] \Longleftrightarrow [(n, m)] \leqslant [(n', m')] \\ [(n', m')] \Longleftrightarrow [(n, m)] > [(n', m')] \end{cases}$$

- Moltiplicazione equatoriale:

$$\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\text{: } [(n, m)] \odot [(n', m')] = [(n \odot n', m \odot m')]$$

- Potenza equatoriale $\circledwedge$ (moltiplicazione standard $\cdot$):

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : [(n, m)] \cdot [(n', m')] = [(n \cdot n' + m \cdot m', n \cdot m' + n' \cdot m)]$$

- Potenza standard:

$$\wedge : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : [(n, m)]^{[(n', m')]} = \begin{cases} ([(n, m)]^{[(n', m')]}) & \textit{se } \ m' \geq n' \\ \text{Non definita} & \textit{se } \ n' < m' \end{cases}$$

  E' da specificare che la potenza di un numero intero non è definita se il suo esponente è un numero minore di zero poiché è impossibile definire all'interno di questo insieme l'operazione inversa della potenza equatoriale – la radice equatoriale corrispondente alla divisione standard. Bisognerà quindi introdurre questa operazione in un nuovo insieme, ovvero in $\mathbb{Q}$.

In seguito alla ridefinizione delle operazioni in $\mathbb{Z}$, è opportuno analizzare le loro proprietà in questo nuovo insieme.

Per comodità, scegliamo di indicare d'ora in avanti i numeri interi non più come coppie di naturali, a meno che non ci sia necessario, ma come singoli numeri rappresentati da singole lettere (ad esempio: m, n).

Proprietà. Per quanto riguarda le proprietà associativa, dissociativa e distributiva, queste sono proprie anche dell'insieme $\mathbb{Z}$. Anche le considerazioni sull'elemento neutro per l'operazione di minimo e per l'operazione di prodotto equatoriale sono ancora valide in $\mathbb{Z}$, come quelle sull'elemento simmetrico rispetto al minimo.

L'unica differenza che si trova in questo nuovo insieme è l'esistenza dell'elemento simmetrico rispetto alla moltiplicazione equatoriale:

$$In \quad \mathbb{Z} \quad \forall [(n, m)] \quad \exists [(m, n)] \mid [(n, m)] \odot [(m, n)] = e = 0.$$

Cioè in $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ si può sempre definire l'elemento simmetrico di un numero rispetto al prodotto equatoriale. I numeri n e m in $\mathbb{Z}$ tali per cui il loro prodotto equatoriale è l'elemento neutro di tale operazione ($e = 0$) si dicono simmetrici rispetto al prodotto equatoriale.

Ci scontriamo a questo punto con un problema di notazione. Potremmo continuare a indicare i numeri simmetrici dei numeri naturali (che sarebbero quelli che nella matematica standard chiamiamo numeri negativi) come coppie (n, m) con $n < m$. Tuttavia questo metodo risulta piuttosto macchinoso, per cui è opportuno avvalersi di un simbolo più efficace. Nella matematica standard utilizziamo il simbolo - apposto davanti al numero naturale di cui vogliamo indicare il simmetrico rispetto alla somma, creando così una certa ambiguità – che tuttavia rende le notazioni del calcolo più snelle – essendo tale simbolo uguale al simbolo di sottrazione. Nella geometria equatoriale eviteremo questa ambiguità utilizzando per indicare il simmetrico rispetto alla moltiplicazione equatoriale un simbolo diverso dai segni di operazione della geometria equatoriale. Utilizziamo per i numeri negativi la notazione standard, con il simbolo - davanti al numero intero di cui vogliamo indicare l'opposto.

A questo punto **siamo in grado di introdurre in $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ una nuova operazione, ovvero la divisione equatoriale**, l'operazione inversa della moltiplicazione equatoriale, che indicheremo con il simbolo $\mathbin{\bigcirc\mkern-14mu:}$. Questa operazione corrisponde alla sottrazione nella matematica standard.

- Divisione equatoriale:

$$\mathbin{\bigcirc\mkern-14mu:} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\colon\ n \mathbin{\bigcirc\mkern-14mu:} m = n \odot (-m)$$

Definendo la divisione equatoriale in questo modo, è possibile ricondurre questa operazione a quella fondamentale di moltiplicazione equatoriale con tutte le sue proprietà.

Costruire la struttura $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$

L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ si definisce come l'insieme delle coppie di numeri interi (n, m), con $m \neq 0$, per le quali vale la relazione

$$(n, m) \equiv (n', m') \iff n \cdot m' = n' \cdot m$$

Ordinamento. In $\mathbb{Q}$, come in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, esiste un ordine totale determinato nel seguente modo:

$[(n, m)] \leq [(n', m')]$ se scelti due numeri razionali tali che $m \cdot m' > 0$, in $\mathbb{Z}$ si ha $n \cdot m' \leq n' \cdot m$

Operazioni. Come le operazioni in $\mathbb{N}$ sono state estese in $\mathbb{Z}$, anche con quelle definite in quest'ultimo insieme si può seguire un procedimento analogo per poterle utilizzare per tutti gli elementi in $\mathbb{Q}$.

- Addizione equatoriale:

$$\oplus : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}; [(n, m)] \oplus [(n', m')] = \begin{cases} [(n, m)] \iff [(n, m)] \leqslant [(n', m')] \\ [(n', m')] \iff [(n, m)] > [(n', m')] \end{cases}$$

- Moltiplicazione equatoriale:

$$[(n,\, m)] \odot [(n', m')] = [((n \cdot m') \odot (m \cdot n'),\, m \cdot m')]$$

- Divisione equatoriale:

$$[(n,\, m)] \mathbin{\bigcirc\mkern-14mu:} [(n',\, m')] = [((n \cdot m') \mathbin{\bigcirc\mkern-14mu:} (m \cdot n'),\, mm')]$$

- Potenza equatoriale $\mathbin{\bigcirc\mkern-14mu\wedge}$ (moltiplicazione standard $\cdot$):

$$[(n,\, m)] \cdot [(n', m')] = [(n \cdot n', m \cdot m')]$$

- Potenza standard:

$$\wedge : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : [(n, m)]^{[(n', m')]} = \begin{cases} = [(n^{[(n', m')]}, m^{[(n', m')]}] & \text{se } (n', m') \in \mathbb{Z} \wedge n' \geq m' \\ = [(m^{[(n', m')]}, n^{[(n', m')]}] & \text{se } (n', m') \in \mathbb{Z} \wedge n' < m' \\ \text{Non definita} & \text{se } m' \neq 1 \end{cases}$$

La potenza di un numero appartenente a $\mathbb{Q}$ non è definita se il suo esponente è un numero $(n', m') \in \mathbb{Q}$ poiché è impossibile ottenere all'interno di questo insieme la radice standard, operazione inversa sinistra[4] della potenza standard, per la mancanza del suo elemento simmetrico sinistro. Bisognerà quindi introdurre un nuovo insieme, successivo a $\mathbb{Q}$, ovvero $\mathbb{A}$, in cui si potrà definire questo caso.

Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione equatoriali in $\mathbb{Q}$ non variano da quelle in $\mathbb{Z}$, come anche tutte le considerazioni su queste due operazioni fatte in precedenza.

Sapendo che esiste l'elemento neutro $e = 1$ della potenza equatoriale, ovvero la moltiplicazione standard, possiamo introdurre in $\mathbb{Q}$ l'elemento simmetrico di un numero intero rispetto a questa operazione:

$$In \quad \mathbb{Q} \quad \forall[(n,m)] \quad \exists[(m,n)] \mid [(n,m)] \cdot [(m,n)] = e = 1$$

I numeri n e m in $\mathbb{Q}$ tali per cui la loro potenza equatoriale dà l'elemento neutro di tale operazione, si dicono simmetrici rispetto alla potenza equatoriale.

Indichiamo il simmetrico rispetto alla potenza equatoriale di un numero razionale n con la notazione $\overline{n}$.

Possiamo ora definire in $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ una nuova operazione interna all'insieme $\mathbb{Q}$, la radice equatoriale $(\oslash)$ – che nell'aritmetica standard corrisponde alla divisione – definita come la potenza equatoriale di un numero n per il simmetrico di un altro numero m:

- Radice equatoriale:

$$\oslash : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : n \oslash m = n \cdot \overline{m}$$

Definendo la radice equatoriale in questo modo, possiamo dire che essa è sempre riconducibile alla potenza equatoriale con tutte le sue proprietà.

Costruire la struttura ($\mathbb{A}$, $\oplus$, $\odot$)

Vogliamo a questo punto estendere l'insieme $\mathbb{Q}$ all'insieme dei numeri algebrici che indicheremo con $\mathbb{A}$. Non ci è possibile in questo caso dare una definizione rigorosa di ($\mathbb{A}$, $\oplus$, $\odot$) come abbiamo fatto per le strutture precedenti, quindi ci limiteremo a darne una intuitiva.

Chiamiamo $\mathbb{A}$ l'insieme internamente al quale è possibile definire l'operazione inversa della potenza standard – ovvero la radice standard – per ogni $n \in \mathbb{Q} \mid n \geq 0$, e tale che ($\mathbb{Q}$, $\oplus$, $\odot$)$\subset$($\mathbb{A}$, $\oplus$, $\odot$).

Costruire la struttura ($\mathbb{R}$, $\oplus$, $\odot$)

L'aritmetica standard si viene a scontrare con la necessità di rappresentare valori non razionali, come π. Si definisce allora la struttura ($\mathbb{R}$, $+$, $\cdot$). Gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}$ possono essere definiti come gli elementi a cui convergono le successioni di Cauchy.

Definizione 4 *Una successione a_n a valori in $\mathbb{Q}$ è di Cauchy se e solo se*[5]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \mid m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_m \odot a_n| < \varepsilon$$

Possiamo allora definire la struttura ($\mathbb{R}$, $\oplus$, $\odot$) che contiene i limiti di tutte le successioni di Cauchy a valori in $\mathbb{Q}$ e tale che ($\mathbb{Q}$, $\oplus$, $\odot$)$\subset$($\mathbb{R}$, $\oplus$, $\odot$).

A questo insieme può essere unito l'elemento neutro della somma equatoriale ottenendo ($\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\oplus$, $\odot$). La struttura così ottenuta è un **semianello**.

La costruzione standard corrispondente sarebbe quella estensiva di ($\mathbb{A}$, $+$, $\cdot$) in ($\mathbb{C}$, $+$, $\cdot$).

Confronto tra aritmetica standard ed equatoriale

Abbiamo scelto di costruire la struttura equatoriale ($\mathbb{R}$, $\oplus$, $\odot$) per estensioni successive a partire da ($\mathbb{N}$, $\oplus$, $\odot$) definito assiomaticamente, in maniera analoga a quanto avviene per la costruzione della struttura standard ($\mathbb{R}$, $+$, $\cdot$), ma con alcune differenze. Vogliamo mettere in evidenza parallelismi e discrepanze mediante una tabella:

table1.jpg

[4]Non essendo la potenza standard un'operazione commutativa, è necessario distinguere un'operazione inversa sinistra (la radice) e un'operazione inversa destra (il logaritmo).

[5]Il valore assoluto $|\cdot|$ è definito come: $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ \odot a & \text{se } a < 0 \end{cases}$

Bibliography

Appunti ed esercizi di Matematica Discreta, Roggero Margherita, Quaderni didattici del dipartimento di Matematica, University of Torino.

Speyer, D. and Sturmfels, B., “Tropical Mathematics", ArXiv Mathematics e-prints, math/0408099, Combinatorics, Algebraic Geometry, 2004, aug, http://adsabs.harvard.edu/abs/2004math......8099S, Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.

Brugallé, E. and Itenberg, I. and Mikhalkin, G. and Shaw, K., “Brief introduction to tropical geometry", ArXiv e-prints, “arXiv", 1502.05950, “math.AG", Mathematics - Algebraic Geometry, Mathematics - Combinatorics, 2015, feb, http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv150205950B, Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.